# 或る種の配分過程 (動的計画法の研究会報告集)



北川, 敏男

数理解析研究所講究録
67巻 1969年 75-104



# 或る種の配分過程

九大理　　北川敏男

§1. 序　1967年4月13日，日本数学会総会において，私は動的計画法にあらわれる配分過程に関する関数方程式

$$\text{(A)} \quad f(x) = \max_{0 \leq y \leq x} \left[ g(y) + h(x-y) + f(ay + b(x-y)) \right]$$

に関する諸拡張について報告した．その内容は次の文献に詳しく述べられている．

〔1〕拙著：動的計画法による配分過程，数理科学講究録28，数理科学講究録刊行会，(1967年9月) p.105–143.

その研究の目的は，この方面の開拓者であるR. Bellmanの次の著述にみられる結果を，より一般の関数方程式についても成立することを示すことであった．

〔2〕Bellman, R.: Dynamic Programming, Princeton Univ. press, (1957).

さて今回の報告は，同じ目的をもつものであるが，拡張の方向は異る．関数方程式(A)において，$y=u$, $x-y=v$とおくとき

$$(A_1) \quad f(x) = \max_{\substack{u+v=x \\ u \geq 0,\, v \geq 0}} \left[ g(u) + h(v) + f(au+bv) \right]$$

と書かれる. $(u, v)$ の2次元であるのを, $k$次元へ拡張するのを主眼とする. 報告[1]が2次元に限定されているのに対して, その若干の結果は $k$次元 $(k \geqq 3)$ に拡張できることを示すことが, 目的である. さらに委しく述べると, 次の通りである.

今回この報告で取扱う関数方程式は

$$(A_k) \quad f(x) = \underset{u \in \beta(x)}{Max}\left[g(u) + f(\varphi(u))\right]$$

である. こゝに $u = (u_1, u_2, \cdots, u_k)$ は $R_+^k: u_1 \geqq 0, u_2 \geqq 0, \cdots, u_k \geqq 0$ に属する任意の点. $x$ は, $0 \leqq x < \infty$ なる実数. $g(u)$, $\varphi(u)$ は $R_+^k$ で定義された与えられた実数値関数. その詳しい條件は後述でその都度規定する. $\{\beta(x); 0 \leqq x < \infty\}$ は実数 $x$ に依存する領域族, これについても委しい條件はあとで述べる. $(A_k)$ を満足する関数 $f(x)$ を求めることが, われわれの課題である. こゝに目標とするところが, 2つある.

(1°) 第1の目的　関数方程式 $(A)$ (従って $(A_1)$) に関して基本的な次の結果を, 関数方程式 $(A_k)$ に関して拡張すること.

(a) Theorem 1 (Existence & uniqueness) (p.12)

(b) Theorem 4 (Convexity) (p. 19)

(c) Theorem 5 (Concavity) (p. 20)

(2°) 第2の目的　線型計画に関する拡張にあたるものを論じることによって，$k=2$ の場合にかぎっていえば，前回の結果を精しくし，かつ次の定理の拡張をあたえる．

(d) Theorem 6 (Concavity) (p. 22).

文献[2] Chapter IV Existence and Uniqueness Theorems において，R. Bellman の論じた Equations of Type One (p. 119—p. 120) は関数方程式 $(A_k)$ とよく類似しているが，わたくしの接近は，趣をことにすることに注意されたい．その委細については，記述が進むにつれ明らかにすることとしたいが，われわれの目的は，配分過程の特徴をつかむという線からは離れないものである．このためにいくつかの概念が準備として必要である．

§2. 準備　基礎概念の導入は，必要になったときにその都度行うことにする．したがって，ここで述べるのは，この報告全体でとくに共通に用いられることだけである．

準備は，$\{\beta(x);\ 0 \leqq x < \infty\}$ から始める．

定義 1. 負ならざる実数 $x$ の各々に対して，有界な閉領域 $\beta(x)$ が定義され，かつ次の性質をもつとき β-family of bounded closed domain $\{\beta(x);\ 0 \leqq x < \infty\}$ は，

monotone increasing divergent family of bounded closed domains in $R^k_+$ であるという。( MIDFBCD in $R^k_+$ とかく)

(1°) $\beta(0)=\{\theta\}$, $\theta=(0,0,\dots,0)$ は $R^k_+$ 領域の原点をあらわす。

(2°) $\forall x > x' \geqq 0$ に対して, $\beta(x) \supsetneqq \beta(x')$

(3°) 有界閉領域 $\beta(x)$ の境界を $bd\,\beta(x)$ であらわし, $R^k_\oplus: u_1>0, u_2>0, \dots, u_k>0$, との共通集合を $b(x)$ であらわす。すなわち $bd\,\beta(x)\cdot R^k_\oplus = b(x)$ とおく。このとき次の条件が満足されるとする。

(i) $\forall u \in R^k_\oplus$ に対して, $u \in b(x)$ となるような $x$ は1つただ1つ存在する。これを $x(u)$ であらわす。

(ii) $x(u)$ は $R^k_\oplus$ で連続である。

(iii) $\forall u \in R^k_+ - R^k_\oplus$ に対しては, (α) $u_n \in R^k_\oplus$ (β) $\lim u_n = u$ なるかぎり $\lim x(u_n)$ が存在して一意にきまる。これを $x(u)$ であらわす。

この3つの性質により、$\forall u \in R^k_+$ に対して定義された関数 $x(u)$ を境界上限関数という。

定義2. $0 \leq x < \infty$ で定義された実数値関数 $c(x)$ が次の条件(1°)–(4°)をみたすとき，これを縮小変換 shrinking transformation という。

(1°) $0 < c(x) < x$, ($0 < x < \infty$ のとき)

(2°) $c(0) = 0$

(3°) $c(x)$ は $0 \leqq x < \infty$ で単調増加

(4°) $c_{(n)}(x) = c(c_{(n-1)}(x))$, $c_{(1)}(x) = c(x)$ $(n \geqq 2)$

とおくとき，すべての $x$ に対して，$n \to \infty$ のときの極限として

(2.1) $$\lim_{n \to \infty} c_{(n)}(x) = 0$$

定義3. $R^k_+$ で定義された実数値関数 $\varphi(u)$ が，有界閉領域族 $\{\beta(x)\}$ に対して，$c(x)$ を majorant function にもつというのは次のことが成り立つことである。

(2.2) $\forall u \in \beta(x)$ に対し $\quad 0 \leqq \varphi(u) \leqq c(x)$.

## §3. 存在定理および一意性定理

定理A. 関数方程式 $(A_k)$ において次のことを仮定する。

(i) $\{\beta(x);\ 0 \leqq x < \infty\}$ は MIDFBCD in $R_+^k$ である。

(ii) 関数 $c(x)$, $0 \leqq x < \infty$, は縮小変換である。

(iii) 関数 $\varphi(u)$ は $\{\beta(x);\ 0 \leqq x < \infty\}$ に関し $c(x)$ を優関数としてもつ。

(iv) 関数 $g(u)$, $\varphi(u)$ は $R_+^k$ で連続関数であり、かつ $g(0)=\varphi(0)=0$.

(v) ここに

$$(3.3)\qquad \underset{u \in \beta(x)}{\underline{Max}}\, |g(u)| \equiv M(x)$$

とおくとき、すべての負ならざる実数 $x$ に対して

$$(3.4)\qquad \sum_{n=1}^{\infty} M\left(c_{(n)}(x)\right) < \infty$$

然るとき、関数方程式 $(A_k)$ の解は存在する。

$f(0)=0$ でありかつ $x=0$ で連続であるという條件を満足する解は存在して、単独である。この解は $0 \leqq x < \infty$ において連続である。

証明は，文献[2] Theorem 1 (p.12) の証明 (p.12–p.16) と全く同一の方針でできる。以下

$$(3.5)\quad T(h;u) \equiv g(u) + h(\varphi(u))$$

とおき，まず $\{f_N(x)\}$ $(N=0,1,2,\cdots)$ を次式によって定義し，これの収束を証明し，その極限関数 $\lim_{N\to\infty} f_N(x) = f(x)$ が解となることを示すことによって，解の存在を証明する。このために補題3.1乃至3.6が用意される。

(i) $f_0(x) \equiv 0$ ，$(0 \leqq x < \infty$ において$)$

(3.6) (ii) $N \geqq 0, 1, 2, 3, \cdots$ に対して

$$f_{N+1}(x) = \underset{u\in\beta(x)}{Max}\, T(f_N; u)$$

補題3.1．$f_1(x) \geqq f_0(x)$ ，$(0 \leqq x < \infty$ に対して$)$

補題3.2 すべての $0 \leqq y < \infty$ に対して $l(y) \geqq h(y)$ ならば $T(l;u) \geqq T(h;u)$

補題3.3 $f_{N+1}(x) \geqq f_N(x)$ $(N=0,1,2,\cdots)$.

補題3.4.

$$|f_{N+1}(x) - f_{N+2}(x)|$$

$$(3.7)\quad \leqq \underline{Max}\Big[\,|T(f_N; u_{N+1}) - T(f_{N+1}; u_{N+1})|,\ |T(f_N; u_N) - T(f_{N+1}; u_N)|\,\Big]$$

ただし，$u_k = u_k(x)$ は一個の次式によって定義されるものとする．

$$
\begin{aligned}
(3.8) \qquad \underset{u\in\beta(x)}{\underline{\mathrm{Max}}}\, T(f_k\,;u) &= T(f_k\,;u_k) \\
&= g(u_k(x)) + h(\varphi(u_k(x)))
\end{aligned}
$$

補題 3.5.

$$
\begin{aligned}
&|f_{N+1}(x) - f_{N+2}(x)| \\
(3.9) \qquad &\leqq \underline{\mathrm{Max}}\Big[\,|f_N(\varphi(u_{N+1})) - f_{N+1}(\varphi(u_{N+1}))|, \\
&\qquad\qquad |f_N(\varphi(u_N)) - f_{N+1}(\varphi(u_N))|\,\Big]
\end{aligned}
$$

補題 3.6

$$(3.10) \qquad d_N(x) = \underset{0\leqq y\leqq x}{\mathrm{Max}} |f_N(y) - f_{N+1}(y)|$$

とおくとき

$$(3.11) \qquad d_{N+1}(x) \leqq d_N(c(x)) \qquad (N=0,1,3\cdots)$$

したがって

(3.12) $$d_{N+1}(x) \leqq M(C_{(N+1)}(x)), \quad (0 \leqq x < \infty)$$

このような補題から、$\lim_{N\to\infty} f_N(x)$ の存在及びそれが解になること、さらにその解が定理Aにおける性質をもつことは容易に示される。さらにそのような性質をもつ解が一意にきまることとは、Bellmanの証明と同じ方法で容易に示される。

§4. 2つの有界閉領域族 $\beta$-族と $\mathcal{G}$-族と両者間の関係

すでに $\{\beta(x);\ 0 \leqq x < \infty\}$ については、これが MID-FBCD in $R_+^k$ であることを仮定した。ここで所与の関数 $g(u)$, $u \in R_+^k$, に対して、これに対応する性質を以下において仮定して $\{\mathcal{G}(y);\ 0 \leqq y < \infty\}$ なるものを導入する。簡単のため、$g(u)$ は、$u \in R_+^k$ において $u$ の連続関数であるとしよう。

仮定4.1. 負ならざる実数 $y$ の各々に対して、

(4.1) $$\mathcal{G}(y) = \{u;\ g(u) \leqq y\}$$

によって定義される、$R_+^k$ に属する集合の族 $\{\mathcal{G}(y);\ 0 \leqq y < \infty\}$ は定義1の意味において MID FBCD in $R_+^k$ であるとする。このとき　定義1の意

味において $bd\, g(y)\cdot R^k_+ = g^*(y)$ とおき，これに対応して $\forall u \in R^k_+$ に対して定義される関数として境界上限関数を $y(v)$ であらわす。

さて今やわれわれは，$B$-族と $g$-族との2つのMID-FBCD in $R^k_+$ をもったことになるが，その両者の関係において定義される2つづつ計4つの関数が以下において重要な役を演ずる。それらは，次のようにして定義される。

定義 2. 2つのMIDFBCD in $R^k_+$ において

$$(4.2)\qquad [\,y;\ b(x)\,g^*(y) \neq \phi,\ 0 \leqq y < \infty\,] \equiv Y_g(x)$$

$$(4.3)\qquad [\,x;\ b(x)\,g^*(y) \neq \phi,\ 0 \leqq x < \infty\,] \equiv X_g(y)$$

とおき

$$(4.4)\qquad \sup Y_g(x) \equiv \overline{Y}_g(x),\quad \inf.\ Y(x) \equiv \underline{Y}_g(x)$$

$$(4.5)\qquad \sup X_g(y) \equiv \overline{X}_g(y),\quad \inf.\ X(y) \equiv \underline{X}_g(y)$$

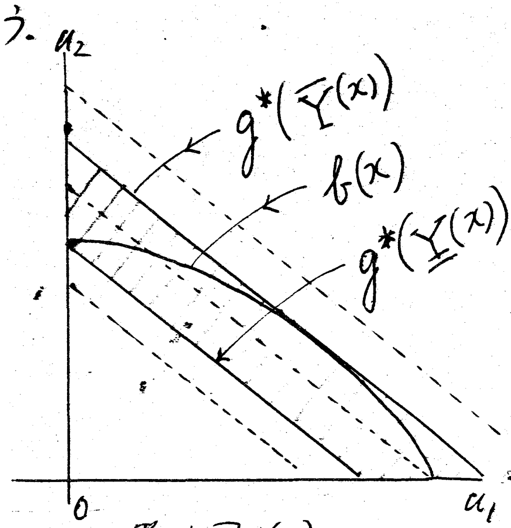
とおく。

ここに，これらを次のように呼ぶことにする：

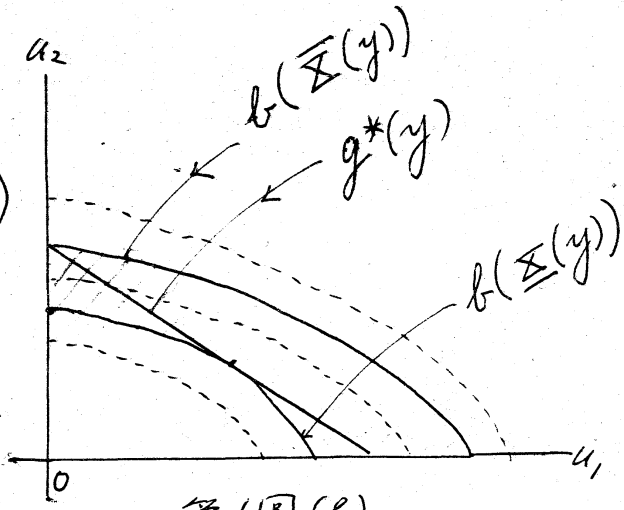
(4.6) (1°) $Y_g(x)$ : $\beta(x)$ に対する $g$-族の接合値集合
(set of contact values)
(2°) $\Xi_g(y)$ : $g(y)$ に対する $\beta$-族の接合値集合

(4.7) (1°) $\overline{Y}_g(x)$ 及び $\underline{Y}_g(x)$ : $\beta$-族に対する $g$-族の接合上限関数 及び 接合下限関数
(upper contact value function & lower contact value function)
(2°) $\overline{\Xi}_g(y)$ 及び $\underline{\Xi}_g(y)$ : $g$-族に対する $\beta$-族の接合上限関数及び接合下限関数.

この種の概念が，計画数学の問題をとりあつかううえにおいて大切なことが多いように思われる。判りやすくするため、極めて簡明な場面について例示しておこう。



第1図 (a)



第1図 (b)

以上 B族と G-族との間に規定されたと同様に，所与の関数 $\varphi(u)$, $u\in R_+^n$ に対して，$\{\Phi(z); 0\leqq z<\infty\}$ なるものを導入する．簡単のため，$\varphi(u)$ は，$u\in R_+^n$ において $u$ の連続関数であるとする．

仮定4.2 負ならざる実数 $z$ の各々に対して

(4.8) $\Phi(z)=\{u;\ \varphi(u)\leqq z\}$

によって定義される，$R_+^n$ に属する集合の族 $\{\Phi(z);\ 0\leqq z<\infty\}$ は定義1の意味において MIDFBCD in $R_+^n$ であるとする．このとき定義1の意味において，$bd\ \Phi(z)\cdot R_{++}^n=\varphi^*(z)$ とおき，これに対応して $\forall w\in R_+^n$ に対して定義される関数として境界上限関数を $z(w)$ であらわす．これを $\Phi$-族という．

定義3．2つの MIDFBCD in $R_+^n$ B-族および $\Phi$-族において

(4.9) $[z;\ b(x)\varphi^*(z)\neq\phi,\ 0\leqq z<\infty]\equiv Z_\varphi(x)$

(4.10) $[x;\ b(x)\varphi^*(z)\neq\phi,\ 0\leqq x<\infty]\equiv X_\varphi(z)$

とおき

(4.11) $\sup Z_\varphi(x)\equiv\overline{Z}_\varphi(x),\quad \inf Z_\varphi(x)\equiv\underline{Z}_\varphi(x)$

(4.12) $\sup \Sigma_\varphi(z) = \overline{\Sigma}_\varphi(z)$, $\inf \Sigma_\varphi(z) = \underline{\Sigma}_\varphi(z)$

とおく。これらに対する名称は定義之に準ずる。

§5. Convexity の場合 こゝにある実数値関数 $g(u)$, $u \in \mathcal{D}$(凸領域)で convex (downward) というのは, $\forall u_i \in \mathcal{D}$ $(i=1,2)$, $\forall \lambda$, $0 \leqq \lambda \leqq 1$ に対して

$g(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) \leqq \lambda_1 g(u_1) + \lambda_2 g(u_2)$, $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = 1-\lambda$.

$u_1 \neq u_2$, $0<\lambda<1$ のときは, 上の $\leqq$ がいつも $<$ になるのを strictly convex という. この §5 の目的は, 上述のように, §1 (b) の theorem 4 の拡張にあるものを見出すことである. さてこの拡張にあたって留意すべきことがいくつかある.

Bellman の $\zeta$ の定理における convexity の仮定のもちきたらす結果を分析してみると, 関数方程式 $(A_1)$ において右辺の Max を達する $0 \leqq y \leqq x$ が, 実は $y=0$ 又は $x$ というのが 1つの要点である. このことを実現させるためには, $g(u)$, $h(v)$, $au+bv$ の convexity (弱い意味) は充分条件であるが, 必要ではない. $y=0$ 又は $x$ ということを知ると, $g(x)$, $h(x)$ の max. を求めるという問題に帰着させられる. こゝで convexity がまた機能する. このような仮定の機能を2つにわけるとき, われわれは, 次のよ

うな概念を準備する.

定義3 $\beta(x)$は, $0 \leqq x < \infty$の各$x$に対して凸集合であるというのは次の条件をみたすことである. すなわち$\forall u_1, u_2 \in \beta(x)$, $\forall \lambda_1, \lambda_2 \geqq 0$, $\lambda_1+\lambda_2=1$に対して, $\lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2 \in \beta(x)$.

定義4 MIDFBCD in $R_+^k$である$\{\beta(x); 0 \leqq x < \infty\}$が, 次の条件をみたすとき, $R_+^k$の$k$個の主軸をふくめて凸集合族をつくるという.

(1°) 各$x$, $0 < x < \infty$, に対して$b(x)$超曲面と第$i$番主軸との交点が~~た~~1つただ1つ存在する. この点を

$$(5.1) \qquad B_i(x) = (0, 0, \cdots, 0, b_i(x), 0, \cdots, 0)$$

であらわす. $(i=1, 2, \cdots, k)$. なお便宜上

$$(5.2) \qquad B_0(x) = (0, 0, \cdots, 0, \cdots 0) = \theta$$

とおく.

(2°) 各$x$, $0 < x < \infty$に対して, $\forall u \in \beta(x) - \sum_{i=0}^{k} B_i(x)$となる$u$に対して, 次のような$u_i \in \beta(x)$ $(i=1, 2)$及び$0 < \lambda_i < 1$, $(i=1, 2)$, $\lambda_1+\lambda_2=1$が存在する. ここに$u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$.

(3°) $b_i(x)$は, $0 < x < \infty$で$x$の単調増加関

数でありかつ凸関数(convex downward fct.)とする.
$b_i(0)=0$ と定義する.

定義5. $R^k_+$ で定義された関数 $h(u)$ が次の條件をみたすとき,これを単調増加であるという. すなわち $\forall u_i$ $(i=1,2)$ に対して, $u_1 \geqq u_2$ ならば $h(u_1) \geqq h(u_2)$.
ここに $u_1=(u_1^1, u_1^2, \dots, u_1^k)$, $u_2=(u_2^1, u_2^2, \dots, u_2^k)$ とおくと, $u_1 \geqq u_2$ とは $u_1^j \geqq u_2^j$ $(j=1,2,\dots,k)$ を意味する.

定義6. $R^k_+$ で定義された関数 $h(u)$ が次の條件をみたすときこれを,(下に)凸(convex (downward))という. すなわち $\forall u_i \in R^k_+$ $(i=1,2)$, $\forall \lambda_i \geqq 0$ $(i=1,2)$, $\lambda_1+\lambda_2=1$ に対して

(5.3) $$h(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) \leqq \lambda_1 h(u_1) + \lambda_2 h(u_2).$$

以上の準備のもとに次の結果をうる。

定理B. 定理Aに対する仮定のうえに, さらに次の仮定を設ける。

(1°) $\{B(x);\ 0 \leqq x < \infty\}$ は $R^k_+$ の $k$ 個の主軸をふくめて凸集合族をつくる。

(2°) 関数 $g(u)$ および $\varphi(u)$ は, $u \in R^k_+$ において, 単調増加でありかつ凸である.

然るとき定理Aにおいて得られた関数方程式$(A_k)$の解は，次の関数方程式を満足する．

(5.4) $$f(x)=\underset{1\leqq i\leqq k}{\mathrm{Max}}\left[g(B_i(x))+f(\varphi(B_i(x)))\right]$$

かつこの解$f(x)$は，単調増加であり凸である．

この定理の証明は，次の3つの補題5.1〜5.3から容易にえられる．

補題5.1. $\{\beta(x);\ 0\leqq x<\infty\}$は，定理Bにおけると同じ条件を満足し，$h(u)$は $u\in R_+^k$において単調増加で凸な連続関数とする．このとき $0\leqq x<\infty$に対して

(5.5) $$g(x)\equiv\underset{u\in\beta(x)}{\mathrm{Max}}\,h(u)$$

は次の性質をもつ．

$$\text{(i)}\quad g(x)=\underset{1\leqq i\leqq k}{\mathrm{Max}}\,h(B_i(x))$$

(5.6) (ii) $g(x)$は$x$の増加関数である．

(iii) $g(x)$は$x$の凸関数である．

証明：Ad(i). 次のような$u_0$があったとせよ．すなわち $u_0\in\beta(x)-\sum_{i=0}^{k}B_i(x)$であり、かつ

$$\underset{u \in \beta(x)}{\mathrm{Max}}\, h(u) = h(u_0)$$

すると定義4 (2°) によって $u_0 = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$, $0 < \lambda_i < 1$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, $u_i \in \beta(x)$ があってこれに対しては $h(u)$ が convex であるから $h(u_0) = h(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2)$ に対して

$$h(u_0) \leqq \lambda_1 h(u_1) + \lambda_2 h(u_2)$$

となるから $\mathrm{Max}(h(u_1), h(u_2)) \geqq h(u_0)$. したがって $u_0 \to u_1$ 又は $u_0 \to u_2$ という変換の少くも1方によって, $u_0$ は移動できる. この論法をくりかえすと, 結局新しく $u_0$ をつくりかえて $u_0 \in \sum_{i=1}^{k} B_i(x)$ と仮定しうる。これによって (5.6) (i) に到達する. (q. e. d.)

Ad (ii). 仮定により定義4 (3°) から $\forall x_1 \leqq x_2$ に対して $b_i(x_1) \leqq b(x_2)$. 従って $B_i(x_1) \leqq B_i(x_2)$. $h(u)$ は単調増加だから $h(B_i(x_1)) \leqq h(B_i(x_2))$ (q. e. d.)

Ad (iii) 仮定により定義4 (3°) から $\forall \lambda_1, \lambda_2 \geqq 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ に対して, $b_i(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leqq \lambda_1 b_i(x_1) + \lambda_2 b_i(x_2)$.

$$
\begin{aligned}
& g(B_i(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)) \\
& = g((0, \cdots, 0, b_i(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2), 0, \cdots, 0)) \\
& \leqq g((0, \cdots, 0, \lambda_1 b_i(x_1) + \lambda_2 b_i(x_2), 0, \cdots, 0)) \quad (\because g \text{ 単調増加}) \\
& = g(\lambda_1 B_i(x_1) + \lambda_2 B_i(x_2)) \\
& \leqq \lambda_1 g(B_i(x_1)) + \lambda_2 g(B_i(x_2)) \quad (\because g \text{ 凸})
\end{aligned}
$$

(q. e. d.)

補題6.2 定理Bの仮定のもとにおいて，$u \in R_+^k$において$h(u)$は補題6.1の仮定をみたすとする。すると

(6.7) $T(h;u) \equiv g(u) + h(\varphi(u))$

は，$u \in R_+^k$において，$u$の関数として(i)単調増加，(ii)凸，(iii)連続である。

証明：Ad(i) $\forall u_1 \leqq u_2$のとき$g(u_1) \leqq g(u_2)$，および$\varphi(u_1) \leqq \varphi(u_2)$. $h$の単調増加性により$h(\varphi(u_1)) \leqq h(\varphi(u_2))$. したがって$g(u_1)+h(\varphi(u_1)) \leqq g(u_2)+h(\varphi(u_2))$.

Ad(ii). $\varphi(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) \leqq \lambda_1 \varphi(u_1) + \lambda_2 \varphi(u_2)$が$\forall u_1, u_2 \in R_+^k$，$\forall \lambda_1, \lambda_2 \geqq 0$，$\lambda_1+\lambda_2=1$に対して成立つ。($\because \varphi$凸) $h$の単調増加であることから

$$h(\varphi(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2)) \leqq h(\lambda_1 \varphi(u_1) + \lambda_2 \varphi(u_2)) \leqq \lambda_1 h(\varphi(u_1)) + \lambda_2 h(\varphi(u_2))$$

最後の不等式は$h$が凸であることによる。

Ad(iii) 明らか.

補題6.3. $\{f_N(x)\}$ $(N=0,1,2,\cdots)$を次式によって定義する。

(6.8)
$$\begin{cases} f_N(x) = \underset{u \in \mathcal{B}(x)}{\mathrm{Max}}\, T(f_{N-1}(x); u) & (N=1,2,\cdots) \\ f_0(x) = 0 & (0 \leqq x < \infty). \end{cases}$$

このとき

(i) 各 $x$, $0 \leqq x < \infty$ について $f_N(x) \leqq f_{N+1}(x)$ $(N=0,1,2\cdots)$

(ii) $0 \leqq x < \infty$ において, $N=0,1,2,\cdots$ に対し

$$(5.9) \qquad f_{N+1}(x) = \max_{1 \leqq i \leqq k} \left\{ g(B_i(x)) + f_N(B_i(x)) \right\}$$

証明. 帰納法による. $N=0$ のときは明らか. $N=n$ で成立するとき, $n=N+1$ に対して (i), (ii) の成立を示すのには補題 5.1〜5.2 を用いる.

定理Bの証明. $\lim f_N(x) = f(x)$ の存在, $f(x)$ が凹であること, $f(0)=0$, $x=0$ の附近で連続なことは定理Aによって示される. これから $f(x)$ は $x \geqq 0$ で連続となる. 関数方程式 (5.4) は (5.9) の $N \to \infty$ として得られる. (証明終)

§6. Concavity の場合　この節では，次の定義によって規定される条件がすべて満足される場合だけを取扱う．

定義 7. 関数方程式 $(A_k)$ において，次の条件 (1°)～(3°) がすべて満足されているとき，関数方程式 $(A_k)$ は凹性条件（　　concavity condition）を満足するという。

(1°) $\{\beta(x)\,;\,0 \leqq x < \infty\}$ について，次の条件 (a)―(d) がすべて満足されている。

(a) MIDFBCD in $R^k_+$ である。

(b) $0 \leqq x < \infty$ の各 $x$ に対して，$\beta(x)$ は凸集合である．

(c) $\forall\, 0 \leqq x_1 < x_2 < \infty$ に対して，$\beta(x_1) \subsetneqq \beta(x_2)$.

(d) $\forall\, u_i \in \beta(x_i)$ $(i=1,2)$，$\forall\, x_1, x_2 \geqq 0$ ならびに $\forall\, \lambda_1 \geqq 0$，$\lambda_2 \geqq 0$，$\lambda_1+\lambda_2=1$ に対して

$$(6.1)\qquad \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \in \beta(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)$$

(2°) 関数 $\varphi(u)$ は，$u \in R^k_+$ において $u$ の（下に）凹な関数である．すなわち $\forall\, u_i \in R^k_+$ $(i=1,2)$，$\forall\, \lambda_1 \geqq 0$，$\lambda_2 \geqq 0$，$\lambda_1+\lambda_2=1$ に対して，つねに次の関係が成り立つ、

$$(6.2)\qquad \varphi(\lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2)\geqq\lambda_1\varphi(u_1)+\lambda_2\varphi(u_2)$$

また $\varphi(u)$ は $u$ の単調増加関数とする。すなわち $\forall u_1\geqq u_2$, $u_1, u_2\in R^k_+$ に対してつねに $\varphi(u_1)\geqq\varphi(u_2)$.

(3°) 関数 $g(u)$ は, $u\in R^k_+$ において $u$ の(下に)狭義の凹関数とする。すなわち $g$ について(6.2)に対応する関係が成立つとともに，とくに $u_1\neq u_2$, $0<\lambda_1, \lambda_2<1$, $\lambda_1+\lambda_2=1$ に対しては

$$(6.3)\qquad g(\lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2)>\lambda_1 g(u_1)+\lambda_2 g(u_2).$$

また $g(u)$ は $u$ の狭義の単調増加関数とする。すなわち $\forall u_1\geq u_2$ $u_1, u_2\in R^k_+$ に対しては $g(u_1)>g(u_2)$.

注意 $u_i=(u_1^i, u_2^i, \dots, u_k^i)$ $(i=1,2)$ において $u_j^1\geqq u_j^2$ $(j=1,2,\dots,k)$ が成立つとともに少くとも1つの $j$ について，$u_j^1>u_j^2$ なるとき $u_1\geq u_2$ とかく。

以下本節では，その目的とする定理Cの論証ならびに証明の場合ものでき，一々条件として設定されている定義分の凹性条件について述べない。本節では全体にわたってこれが前提され

ているとする。この約束のもとに次の補題を用意する。

補題6.1 $0 \leqq z < \infty$ において関数 $h(z)$ は、$z$ の単調増加関数でありかつ凹関数であるとする。すると

$$(6.4) \qquad T(h; u) \equiv g(u) + h(\varphi(u))$$

は、$u \in R_+^k$ の関数として、狭義の単調増加関数であり、狭義の凹関数である。

証明：$\forall u_1, u_2 \in R_+^k$, $u_1 \neq u_2$, $\forall \lambda_1, \lambda_2 > 0$ $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ に対して次の数個の不等式の成立することから狭義の凹関数であることが示される。

$$g(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) > \lambda_1 g(u_1) + \lambda_2 g(u_2)$$

$$\varphi(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) \geqq \lambda_1 \varphi(u_1) + \lambda_2 \varphi(u_2)$$

$$\begin{aligned} h(\varphi(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2)) &\geqq h(\lambda_1 \varphi(u_1) + \lambda_2 \varphi(u_2)) \\ &\geqq \lambda_1 h(\varphi(u_1)) + \lambda_2 h(\varphi(u_2)) \end{aligned}$$

狭義の単調増加も明らか。

補題6.2. 関数 $p(u)$ は、$u \in R_+^k$ において $u$ の関数として、狭義の単調増加関数であり、かつ狭義の凹関数であるとする。すると $0 \leqq x < \infty$ で定義される $x$ の関数

$$(6.5) \qquad q(x) \equiv \underset{u \in \beta(x)}{\mathrm{Max}}\, p(u)$$

は、$x$の関数として、狭義の単調増加関数であり、かつ狭義の凹関数である。

証明：狭義の単調増加であることは明らかである。狭義の凹関数であることは、次のように示される。いま $\forall\ x_1 < x_2$, $\forall\ \lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ に対して

$$(6.6)\quad \lambda_1 g(x_1) + \lambda_2 g(x_2)$$
$$= \lambda_1 \underset{u \in \beta(x_1)}{\mathrm{Max}}\ p(u) + \lambda_2 \underset{u \in \beta(x_2)}{\mathrm{Max}}\ p(u)$$
$$= \lambda_1 p(u_1(x_1)) + \lambda_2 p(u_2(x_2))$$

となるところの $u_i(x_i) \in \beta(x_i)$ $(i=1, 2)$ が存在する。ここに $x_1 < x_2$ から $g(x_1) < g(x_2)$。したがって $u_1(x_1) \neq u(x_2)$, $0 < \lambda_1, \lambda_2 < 1$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ であるから、関数 $p(u)$ が狭義の凹関数であることから

$$(6.7)\quad \lambda_1 p(u_1(x_1)) + \lambda_2 p(u_2(x_2)) < p(\lambda_1 u_1(x_1) + \lambda_2 u_2(x_2))$$

さて定義今の条件(1)(d)によって、

$$(6.8)\quad \lambda_1 u_1(x_1) + \lambda_2 u_2(x_2) \in \beta(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)$$

となる。こゝにおいて

(6.9) $$p(\lambda_1 u_1(x_1)+\lambda_2 u_2(x_2)) \leqq \underset{u\in\beta(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2)}{\mathrm{Max}}\, p(u)$$

(6.6), (6.7) および (6.9) から

(6.10) $$\lambda_1 q(x_1)+\lambda_2 q(x_2) < q(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2)$$

を得る。(q.e.d.).

さてわれわれの目的は，定義7で与えた凹性条件を満足する場合について，なるべく簡明な成果をうることである。しかし、こゝにさらにいくらかの条件を加えた方が少なくとも判りやすい。

定義8. $\{p(x);\ 0\leqq x<\infty\}$ が strictly monotone increasing divergent family of bounded closed domains SMIDFBCD in $R^k_+$ というのは，次の2つの条件を満足させることをいう。

(1°) $\{p(x);\ 0\leqq x<\infty\}$ は MIDFBCD in $R^k_+$ である。

(2°) $\forall x_2>x_1\geqq 0,\ \forall u_1\in p(x_1)$ に対して次のような $u_2$ がある。$\exists u_2\in \beta(x_2),\ u_2\geqq u_1$

以上の準備のうち次の定理Cを示すことができる。

定理C. 関数方程式 $(A_k)$ において，次の仮定を設ける。

(1°) 定理Aにおける仮定はすべて成立つ。

(2°) いま

$$(6.11)\quad \begin{cases} G(y)=[v;\ g(v)\leqq y,\ v\in R^+_k] \\ \Phi(z)=[w;\ \varphi(w)\leqq z,\ w\in R^+_k] \end{cases}$$

によって定義される

$$(6.12)\quad \begin{cases} \{G(y);\ 0\leqq y<\infty\} \\ \{\Phi(z);\ 0\leqq z<\infty\} \\ \{\mathcal{F}(x);\ 0\leqq x<\infty\} \end{cases}$$

の各々は，SMIDFBCD in $R^k_+$ である。

(3°) 定義7で規定した凹性条件を満足する。

然るとき，関数方程式$(A_k)$を満足し，$f(0)=0$，$x\geqq 0$で連続な解$f(x)$は1つあってただ1つに限る。

これについて，次の結果がえられる。

(i) $f(x)$は$0\leqq x<\infty$で$x$の狭義の単調増加関数である。

(ii) $f(x)$は$0\leqq x<\infty$で$x$の狭義の凹関数である。

(iii) $0\leqq x<\infty$なる各$x$に対して$u(x)\in R^k_+$が一意にきまり

$$f(x) = \underset{u\in\beta(x)}{\mathrm{Max}}\left[g(u) + f(\varphi(u))\right] \tag{6.13}$$

$$= g(u(x)) + f(\varphi(u(x)))$$

これを証明するために、次の補題を準備する。

補題 6.3. 定理Cの仮定のもとで

$$\text{(6.14)}\quad \begin{cases} f_N(x) = \underset{u\in\beta(x)}{\mathrm{Max}}\, T(f_{N-1}\,;\,u) & (N \geqq 1) \\ f_0(x) = 0 \end{cases}$$

によって $\{f_N(x)\}$ $(N=0,1,2,\cdots)$ を定義すると，次の性質をもつ．

(i) $f_N(x)$ は，$x$ の狭義の単調増加関数である。

(ii) $f_N(x)$ は，$x$ の狭義の凹関数である。

(iii) 次のような $\{u_N(x)\}$ $(N=1,2,3,\cdots)$ が一意にきまる。

$$f_N(x) = T(f_{N-1}\,;\,u_N(x)) \tag{6.15}$$

証明：Ad(i)：$\forall\, 0 \leqq x_1 < x_2 < \infty$ に対して

$$f_N(x_1) = \underset{u\in\beta(x_1)}{\mathrm{Max}}\, T(f_{N-1}\,;\,u) \tag{6.16}$$

$$= T(f_{N-1}\,;\,u_N^*(x_1))$$

となる $u_N^*(x_1)$ は存在する。(一意にきまるかどうかは今しばらくは問題でない). $u_N^*(x_1)\in\beta(x_1)$. そこで $\beta$-族は S凹IDF BCD in $R_+^k$ であるから、次のような $u_2$ がある。すなわち $u_2\in\beta(x_2)$, $u_N^*(x_1)\leqq u_2$. したがって、$\varphi$, $g$, $f_{N-1}$ に対する条件から

$$\begin{cases} \varphi(u_N^*(x_1))\leqq\varphi(u_2) \\ g(u_N^*(x_1))<g(u_2) \\ f_{N-1}(\varphi(u_N^*(x_1)))\leqq f_{N-1}(u_2) \end{cases}.$$

ことからして

$$\begin{aligned} T(f_{N-1};u_N^*(x_1)) &= g(u_N^*(x_1))+f_{N-1}(\varphi(u_N^*(x_1))) \\ &\leqq g(u_2)+f_{N-1}(\varphi(u_2)) \\ &\leqq \operatorname*{Max}_{u\in\beta(x_2)} T(f_{N-1};u) \end{aligned}$$

これから $f_N(x_1)<f_N(x_2)$ がえられる。

Ad(ii): (i)と同様にして

$$\begin{aligned} f_N(x_i) &= \operatorname*{Max}_{u\in\beta(x_i)} T(f_{N-1};u) \qquad (6.17)\\ &= g(u_N^*(x_i))+f_{N-1}(\varphi(u_N^*(x_i))) \end{aligned}$$

これについて次の不等式がえられる。

$$\begin{aligned} &\lambda_1 f_N(x_1)+\lambda_2 f_N(x_2) \\ &= \lambda_1 g(u_N^*(x_1))+\lambda_2 g(u_N^*(x_2)) \qquad (6.18) \end{aligned}$$

$$+\lambda_1 f_{N-1}(\varphi(u_N^*(x_1))) + \lambda_2 f_{N-1}(\varphi(u_N^*(x_2)))$$

いま $0<\lambda_1,\lambda_2<1$, $\lambda_1+\lambda_2=1$, $0\leqq x_1<x_2<\infty$ として
あるから、SMIDBCDに$R^k_+$の性質から $u_N^*(x_1)\neq u_N^*(x_2)$
となる。 $g$が狭義の凹関数であることから

$$\lambda_1 g(\varphi(u_N^*(x_1))) + \lambda_2 g(\varphi(u_N^*(x_2)))$$
$$< g(\lambda_1\varphi(u_N^*(x_1)) + \lambda_2\varphi(u_N^*(x_2)))$$
$$\leqq g(\varphi(\lambda_1 u_N^*(x_1) + \lambda_2 u_N^*(x_2)))$$

他方 帰納法として $f_{N-2}(x)$については狭義の凹性
があるとすると

$$\lambda_1 f_{N-1}(\varphi(u_N^*(x_1))) + \lambda_2 f_{N-1}(\varphi(u_N^*(x_2)))$$
$$\leqq f_{N-1}(\lambda_1\varphi(u_N^*(x_1)) + \lambda_2\varphi^*(u_N^*(x_2)))$$
$$\leqq f_{N-1}(\varphi(\lambda_1 u_N^*(x_1) + \lambda_2 u_N^*(x_2)))$$

あきらかに $u_N^*(x_i)\in\beta(x_i)$ $(i=1,2)$ よって定義の
(10)(d) により $\lambda_1 u_N^*(x_1)+\lambda_2 u_N^*(x_2)\in\beta(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2)$.
したがって 結局

$$\lambda_1 f_N(x_1) + \lambda_2 f_N(x_2)$$
$$\lneqq \underset{u\in\beta(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2)}{Max}\, T(f_{N-1}; u) = f_N(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2)$$

Ad(iii). いましばらく，簡単のために $T(h_{N-1};u)\equiv h_{N-1}(u)$ とおき

(6.19) $[w;\ h_{N-1}(w)\leqq z,\ w\in R_+^k]\equiv \Xi_{h_{N-1}}(z)$

とおき，かつ次のようにおく．

(6.20) $\Xi_{h_{N-1}}^c(z)\equiv R_+^k-\Xi_{h_{N-1}}(z)$

すると，これに関して次のことが見られる．

(a) 各 $\overline{\Xi}_{h_{N-1}}^c(z)$ は $0\leqq z<\infty$ なる各 $z$ に対して strictly convex closed domain になっている。

(b) $0\leqq z_1<z_2$ ならば

$$\overline{\Xi}_{h_{N-1}}^c(z_1)\supsetneqq\overline{\Xi}_{h_{N-1}}^c(z_2)$$

(c) 如何なる $w\in R_+^k$ を与えても $h_{N-1}(w)$ の逆関数 $h_{N-1}^*(\cdot)$ を用い，適当な実数 $z$ をえらんで $w\in h_{N-1}^*(z)$ とすることができる。かかる $z$ は一意にきまる。

かくしていまわれわれの眼前には2つの convex closed domains の families が与えられてきている。1つは $\{\beta(x);\ 0\leqq x<\infty\}$ 他の1つは $\{\overline{\Xi}_{h_{N-1}}^c(z);\ 0\leqq z<\infty\}$ 前者は原点 $O=\beta(0)$ が次第に拡大し，ついには $R_+^k$ 全体を掩はうとする。これに対して後者は $z=0$ のときは $\overline{X}_{h_{N-1}}^c(0)=R_+^k$，次第に小さくなるが，いつも有界ではない。

ここでわれわれは，凸集合の分離定理を利用できる。

かくして

(6.21) $\quad Z_{h^*_{N-1}}(x) \equiv [z; b(x) h^*_{N-1}(z) \neq \phi, 0 \leq z < \infty]$

とおき この実数の集合 $Z_{h^*_{N-1}}(x)$ において、その最大値

(6.22) $\quad \sup Z_{h^*_{N-1}}(x) = \mathrm{Max}\, Z_{h^*_{N-1}}(x) = \bar{z}_N(x)$

とおき $u_N(x) = h^*_{N-1}(\bar{z}_N(x)) \cdot b(x)$ によって定まる点をとればよい。 (q. e. d.)

定理Cの証明. 補題6.1で述べた $\{f_N(x)\}$ の極限関数として $f(x)$ が定義できることは、定理Aを援用すればよい。$f(x)$ については、単調増加凹性は補題6.3から直ちにわかる。しかし実はそれは狭義の意味でよいことは

(6.23) $\quad f(x) = \underset{u \in \beta(x)}{\mathrm{Max}} [g(u) + f(\varphi(u))]$

が成立つこと、これに補題6.1〜6.2を援用することによってわかる。$u(x)$ の存在は、$b(x)$ 曲面上に $\{u_N(x)\}$ なる点集合を得ているから、少くも1つの集積点がある。これが2つ以上あれば矛盾におち入る。この集積点が求める $u(x)$ である。